односно, притисак у течности на дну левог стуба

$$p_2 = \frac{F_2^{\perp}}{\Delta S} = \rho(g-a)h_2 \tag{11}$$

Како су лви и десни стуб течности спојени, ова два притиска на дну цеви су једнаки: $p_1 = p_2$, одакле се добија

$$a = g\frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2} \tag{12}$$

Читаоцима остављамо као задатак да напишу изразе за компоненте $F_1^{\perp}$ и $F_2^{\perp}$ укупних сила које делују нормално на зидове у стубоввима течности 1 и 2 редом.

## ПРЕДЛОГ ЗА ЈЕДАН ЕКСПЕРИМЕНТ

За проверу релације (12) користи се систем који чине колица са "V" стакленом цеви и теговиима (слика 1). Циљ експеримента је да се покаже да убрзање које се добија применом релације (12), мерењем висина $h_1$ и $h_2$ при убрзаном кретању колица, приближно одговара убрзању које се добија применом закона убрзаног кретања без почетне брзине, тј. $a=2s/t^2$. Описан концепт мерења убрзања се може проверити и применом Другог Њутновог закона за овај систем колица-тегови, тј. $a=mg/(M+m)$.

| $h_1$ | $h_2$ | $a=g(h_2-h_1)/(h_1+h_2)$ | $s$ | $t$ | $a=2s/t^2$ | $a=mg/(M+m)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Поставити колица на подлогу, хоризонталне шине на којима се налазе бочни граничници са отворима за постављање фотосензора. Поставити фотосензоре на растојању које је једнако путу колица $s$. Окачити о слободни крај конца тег $m$, затим, држећи једном руком колица померати колица у почетни положај, тако да предњи крај колица буде непосредно испред отвора првог фотосензора. Пустити колица да се слободно крећу по подлози. Време $t$ потребно да колица пређу пут од једног до другог фотосензора очитати на дигиталном хронометру. На основу добијених вредности за $s$ и $t$, користећи горе дате релације израчунати убрзање $a$. Истовремено кретање колица снимити употребом мобилног телефона како бисмо лакше очитали вредности за $h_1$ и $h_2$. Израчунати убрзање применом релације (12) затим извршити упоређивање добијених вредности за $a$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Чалуковић Н., Физика 1, Београд: Круг, 2005, стр. 41-68
2. Kittel C., Knight W. D., Ruderman M. A., Mechanics, Berkeley physics course, Vol1. NY: McGraw-Hill, 1973, pp. 40-46.
3. Halliday D., Resnick R., Fundamentals of physics, NY: John Wiley & Sons, 1986, pp. 31-35.
4. Савељев И. В., Курс опште физике, том 1, Москва: Наука, 1982, стр. 41-45.




Настава физике, број 12, 2023, стр 217 - 220

# Анхармонијски осцилатор


Милан С. Ковачевић[1], Јовица Мишковић[2], Мирослав Јовановић[3,4]

*[1]Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу*
*[2]Електротехничка школа „Михајло Пупин“, Косовска Грачаница*
*[3]Гимназија „Јосиф Панчић“, Бајина Башта*
*[4]Техничка школа, Бајина Башта*



**Апстракт.** Анхармонијски осцилатор заузима важну улогу у пракси, јер хармонијски осцилатор је тек теоријска апроксимација када се силе пригушења и други неки фактори могу занемарити. Код оваквих проблема је неопходно узети и зависност учестаности од амплитуде. У раду је приказан један конкретан пример осциловања које је описао амерички физичар Иан Р. Гатланд (I R Gatland). Он је са групом својих сарадника описао један карактеристичан метод прорачуна анхармонијског осцилатора, помоћу којег је могуће описати многе примере осциловања, као на пример одскакање лопте од чврсте подлоге.


**Кључне речи**: хармонијски и анхармонијски осцилатор.

## МОДЕЛ АНХАРМОНИЈСКОГ ОСЦИЛАТОРА

Претпоставимо да се честица масе $m$ креће у правцу x-осе око равнотежног положаја, под дејством силе која је усмерена према њему и има константну вредност $F = -F_0 \,\mathrm{sgn}(x)$, gde je $F_0$ konstanta, док је sgn(x) добро позната логичка функција која одређује знак броја $x$. Придружени потенцијал има облик $V = F_0|x|$, а једначина кретања честице у том случају постаје $d^2x/dt^2 = -c\,\mathrm{sgn}(x)$ где је $c = F_0/m$. Уз почетне услове за положај и брзину, $t=0$, $x=0$ и $v=0$, за позитивне врдности $x$ добија се решење $x(t)$ у облику $x = A - ct^2/2$ (парабола), које је валидно за временски интервал $-\sqrt{2A/c} < t < \sqrt{2A/c}$. За време изван овог интервала, решење је иста парабола временски померена за $2\sqrt{2A/c}$. Поптпуно решење имаће период $4\sqrt{2A/c}$ и кружне фреквенције $\omega = \sqrt{c\pi^2/8A}$. Како је показано у раду [1], у случају непригушеног осциловања, до решења $x(t)$ се може доћи применом Фуриеовог низа

$$x = 32\pi^{-3} A \sum_{n=0}^{\infty} n^{-3} \sin(n\pi/2)\cos(n\omega t) \tag{1.a}$$

у коме само непарне вредности за n дају ненулте чланове, тако да низ почиње на следећи начин:

$$x = 32\pi^{-3} A\left[\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)/27 + \cos(5\omega t)/125 - K\right] \tag{1. б}$$

Пошто је $32\pi^{-3} = 1{,}032$, а други члан је 1/27 вредности првог, ово решење се разликује од решења за хармонијски осцилатор тек незнатно. Можемо закључити да се у случају непригушеног анхармонијског осциловања, зависност угаоне фреквенције од амплитуде се може практично занемарити.

У случају пригушеног осциловања полазимо од облика силе $F = -F_0 \operatorname{sgn}(x) - \gamma v$ (линеарно пригушење) где је $\gamma$ коефицијент слабљења за који узимамо да је мали, док је $v$ брзина. Увођењем две нове константе, $c' = -F_0 \operatorname{sgn}(x)/m$ и $b' = -\gamma/m$ добија се једначина кретања у следећем облику: $d^2x/dt^2 = -c' - b'v$. Имајући у виду почетне услове, $x = x_0$ и $v = v_0$ за $t = t_0$, добијају се следећа решења за брзину и положај:

$$v = \left((c' + b'v_0)\exp\left[-b'(t - t_0) - c'\right]\right)/b' \tag{2}$$

и

$$x = x_0 + \left((c' + b'v_0)\left(1 - \exp\left[-b'(t - t_0)\right]\right) - c'b'(t - t_0)\right)/b'^2 \tag{3}$$

Даљи поступак каже да можемо одредити тренутак $t_1$ када се x анулира, затим одредити брзину $v_1$ у тренутку $t_1$, и добити ново решење за $t>t_1$, користећи $x=0$ $v=v_1$ за $t=t1$ као нови гранични услов. То нам омогућује да одредимо тренутак $t=t_2$ кад ово решење исчезава после чега можемо поново одредити граничне услове. Овај процес можемо понављати по жељи. Међутим, одређивање вредности за $x=0$ не може да се изведе аналитички тако да је ово решење о којем говоримо само апроксимативно. Постоје ефикасне нумеричке методе, али ми ћемо у наставку објаснити једну апроксимативну методу за аналитичко решење једначине.

*Приближно аналитичко решење*: Закон промене амплитуде се може пронаћи познавањем промене укупне енергије. Ако се занемари слабљење тотална енергија је $E=F_0A=cmA$. На тај начин добијамо $A=E/cm$. Са овог становишта губитак енергије добија се преко рада оне компоненте која зависи од брзине. Из реченог произилази да се може написати

$$\Delta E = \int (-\gamma v)dx = -\gamma \int v^2 dt \tag{4}$$

Интеграција се врши за један период. У случају занемарљивог слабљења за брзину се може узети да је $-ct$ у једној половини циклуса. Кад још узмемо у обзир приближну симетрију осциловања око равнотежног положаја $x$=0 можемо добити за енергетске губитке у току једног периода следећи резултат

$$\Delta E = -2\gamma \int_{-\omega/2\pi}^{\omega/2\pi} c^2 t^2 dt = \frac{-4\gamma c^2 (\pi/2\omega)^3}{3} \tag{5}$$

После овога можемо приступити оцени промене амплитуде. Наиме, промена амплитуде је $\Delta A = \Delta E/cm = -4\gamma A\pi/(3m\omega)$. Извод $dA/dt$ можемо апроксимирати количником $b = 2\gamma/3m$ где је $\tau$ период. На овај начин следи $1 - \exp\left[-b'(t - t_0)\right]$, где је $b = 2\gamma/3m$ коју третирамо као коефицијент слабљења. То значи ако је $A_0$ почетна вредност амплитуде, амплитуда А у каснијим тренутцима имаће следећи облик:

$$A = A_0 e^{-bt} \tag{6}$$





Видимо да амплитуда експоненцијално опада са временом. С друге стране временска зависност угаоне фреквецније види се из следећег низа једнакости

$$\omega = \left(\frac{c\pi^2}{8A}\right)^{1/2} = \left(\frac{c\pi^2}{8A_0}\right)^{1/2} \exp(bt/2) = \omega_0 \exp(bt/2) \tag{7}$$

овде је узета скраћеница $\omega_0 = (c\pi^2/8A_0)^{1/2}$ која се може звати почетна угаона фреквенција. Према томе она амплитуда која се јавља у решењу не пригушеног осцилатора мора да буде замењена са нашим изразом (6). Још треба имати у виду да се $\omega t$ замењује изразом

$$\theta = \int_0^t \omega\, dt = \omega_0 (2/b)\left[\exp(bt/2) - 1\right] \tag{8}$$

Сада можемо написати апроксимативно решење у облику

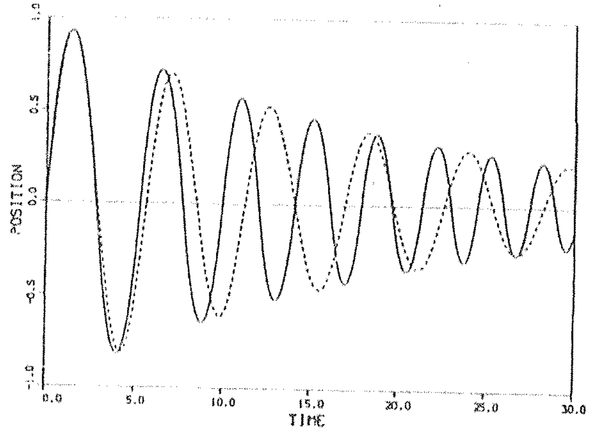
$$x = 32\pi^{-3} A_0 \exp(-bt) \sum_{n=0}^{\infty} n^{-3} \sin(n\pi/2)\cos(n\theta) \tag{9}$$

Може се анализирати ово решење, међутим ми се тиме нећемо бавити. Прецизно испитивање дао је Гетланд и ти резултати се могу наћи у раду који смо цитирали [1].

Сада можемо да упоредимо ово решење за пригушени анхармониски осцилатор (9) са решењем које одговара пригушеном хармонијском осцилатору:

$$y = A_0 \exp(-bt)\cos(\omega_0 t - \delta) \tag{10}$$

Наравно, треба имати у виду да је $\theta = \omega_0 (2/b)\left[\exp(bt/2) - 1\right] - \delta$. Када се заједно нацртају ова два решења видимо да су она на почетку скоро идентична (слика 1). Међутим, како време одмиче све више се осећа утицај везе анхармонијског осцилатора. Слика 1 је добијена за $A_0$=1, $b$=0.05, $c$=1, ($\omega_0 = 1{,}11072$), $\delta = 1{,}5708$.




Слика 1. Хармонијски осцилатор (испрекидана линија) и нехармонијски осцилатор (пуна линија) [1]

Амплитуда анхармонијског осцилатора се мења у основи експоненцијално слично као код хармонијског осцилатора. Опадање амплитиде је нешто спорије него чисто експоненцијално опадање.

### Пример са нееластичном лоптом која одскаче

Претходну анализу можемо тестирати на једном једноставном физичком проблему лопте која одскаче од тврде подлоге уз уважавање нееластичних својстава лопте. Може се показати да је у том случају не пригушеног осциловања применљиво решење (1), али уз напомену да се мора узети апроксимативна вредност координате $x$. Напомињемо да два одскока сачињавају једну осцилацију. Добра је апроксимација која каже да до губитака енергије долази при судару лопте са подлогом, а да се приликом кретања кроз ваздух губици могу занемарити. У току судара брзина се смањи за неки фактор е који се може звати коефицијент рестутуције. Стављајући $\varepsilon = (1 - \alpha)$ и узимајући да је $\alpha$ мала величина, стижемо до закључка да се приликом судара енергија смањује за величину $2\alpha E$ где је $E$ енергија. То значи да се за један циклус, у којем се догоде два судара, амплитуда промени за износ:

$$\Delta A = \frac{\Delta E}{cm} = -\frac{4\alpha E}{cm} - 4\alpha A \tag{11}$$

Сада можемо рећи да је брзина опадања амплитуде

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\Delta A}{(2\pi / \omega)} = -\alpha (Ac/2)^{1/2} \tag{12}$$

Након интеграције добија се

$$A = \left[ A_0^{1/2} - \alpha (c/8)^{1/2} t \right]^2 \tag{13}$$

Видљива је јасна разлика у односу на зависност амплитуде од времена када је пригушење пропорционално брзини. Наиме, овде се ради о једном нелинеарном механизму који доводи до тога да ће кретање престати у коначном временском интервалу. Видимо да величина А се анулира у тренутку $t = (8A_0/c)^{1/2}/\alpha$ .

## ЗАКЉУЧАК

Анхармонијски осцилатор који почива на таквој сили да је потенцијал облика $V = F_0 |x|$ може доста лако да се анализира у случају непригушених осцилација. Нешто је сложенија анализа пригушених осцилација, али кад пригушење није велико могу се добити солидни резултати. Пример који смо овде анализирали као и опит са лоптом који смо навели су помогли да се изврши упоређивање поменутих особина хармонијског и анхармонијског осцилатора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gatland I R, 1991, Theory of a nonharmonic oscillator, *Am. J. Phys.* **59**, pp. 155-158



Настава физике, број 12, 2023, стр 221 - 227

# 100 година од објављивања књиге *From Immigrant to Inventor* Михајла Пупина

Драгољуб А. Цуцић, Ненад Ђ. Лазаров

*Регионални центар за таленте „Михајло Пупин", Панчево, Република Србија; Универзитет у Београду, Институт за Нуклеарне Наука „Винча" — Институт од националног значаја за Републику Србију, Лабораторија за теоријску физику и физику кондензоване материје, Београд, Република Србија*

**Апстракт.** Ова, 2023. година, је година у којој се навршава 100 година од како је први пут објављена књига Михајла Пупина, From Immigrant to Inventor. Значај књиге потврђен је већ после годину дана када је у категорији биографија и аутобиографија добила Пулицерову награду. Књига се и данас, после 100 година, чита и објављује. Актуелна и саветодавна. У раду је представљено како је она настала, као и шта јој је претходило.

**Кључне речи:** Михајло Пупин, From Immigrant to Inventor, Scribner's Magazine, Пулицерова награда, Са пашњака до научењака.

## УВОД

Михајло Пупин је почетком двадесетих година 20. века био признат професор на Колумбија Универзитету, научник и иноватор, човек који је успео да уновчи своје знање. Прихватио се да јавности представи свој животни пут који је био веома инспиративан за нека нова поколења, која су сазревала након Првог светског рата. Првом објављивању књиге From Immigrant to Inventor претходили су текстови у часописима The World's Work, American Magazine и Scribner's Magazine 1922. и 1923. године. Књига From Immigrant to Inventor објављена је у септембру 1923. године. Наредне, 1924. године, добила је Пулицерову награда за најбољу књигу у категорији Биографије и аутобиографије, објављену 1923. године. У раду ћемо представити како је дошло до објављивања књиге, шта је претходило, па до првог издања на српском језику.

## THE WORLD`S WORK И AMERICAN MAGAZINE

Текстовима Михајла Пупина, у Scribner's Magazine, претходили су интервју и текст о њему и његовом доласку у Америку, о животу у Америци и пре доласка, у часописима World`s Work и American Magazine:

1. Why and How I Became an American. From Serb to American, The World`s Work, Vol. 41, No. 3, January 1921, 270-273 [1]